Chpt.1 – Calcul numérique et littéral
Solutions (non détaillées) de certains exercices

Tous les calculs sont à faire sans utiliser sa calculatrice.

Ex. 1 Calculer les nombres suivants :

a) $17 \times (-13) = -221$

b) $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{10}{21}$

c) $-14 \times (-11) = 154$

d) $-\dfrac{11}{9} \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{11}{12}$

e) $-0,7 \times \dfrac{7}{11} = -\dfrac{49}{110}$

f) $-\dfrac{3}{2} \times (-0,5) = \dfrac{3}{4} = 0,75$

g) $-\dfrac{3}{5} \times 3 \times \left(-\dfrac{5}{3}\right) = 3$

h) $\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) \times \left(-\dfrac{4}{9}\right) = \dfrac{1}{18}$

i) $(-5 + 7 - 9 - 1) \times (-3) = 24$

j) $-3 \times 2 + 5 \times 4 + 6 - 8 \times 5 - 7 = -27$

k) $-23 - (3 - (4 - 7) \times (8 - 15)) = -5$

l) $\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}\right) \times (-4) = -\dfrac{2}{3}$

m) $\dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{-3}{5} + \dfrac{7}{9} + \dfrac{11}{3}\right) = \dfrac{346}{135}$

n) $\left(\dfrac{5}{9} - \dfrac{7}{27}\right)\left(1 - \dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{16}{135}$

o) $\dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}}{\dfrac{3}{4} - 1} \times \dfrac{\dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{3}}{1 - \dfrac{4}{5}} \times \dfrac{-\dfrac{7}{8} + 1}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{35}{108}$

p) $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}} = \dfrac{103\,993}{33\,102}$

Ex. 2 Comparer les nombres suivants :

a) $\dfrac{58}{19} > \dfrac{49}{17}$.

b) $\dfrac{5}{7} > \dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{26}{3} < \dfrac{61}{7}$

Ex. 3 Simplifier les nombres suivants

a) $\dfrac{a^5}{a^8} \times \left(\dfrac{a}{a^4}\right)^{-2} = a^3$

b) $(a^3 \times b)^3 \times (a^2 \times b)^{-1} = a^7 b^2$

c) $\dfrac{(a^2 \times b)^3 \times b^{-2} \times c^3}{a^2 \times c \times (bc^2)^2} = \dfrac{a^4}{bc^2}$

d) $\dfrac{(-3)^7}{\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{-5}} = 9$

e) $\left(4^2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3\right) = -2$

Ex. 4 Simplifier en utilisant des exposants positifs

a) $(-x)^{37} = -x^{37}$

b) $\left(x^{-4}y^{-3}\right)^{-5} = x^{20}y^{15}$

c) $x^{-3}y^2(xy)^{-4} = \dfrac{1}{x^7y^2}$

d) $\dfrac{4^{2n+1}}{2^{4n+1}} = 2$

Ex. 5 Simplifier

a) $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

b) $\left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2$

c) $-\left(\sqrt{2}\right)^2 = -2$

d) $\sqrt{2^2} = 2$

e) $\sqrt{(-2)^2} = 2$

f) $-\sqrt{2^2} = -2$

g) $\sqrt{8^2} = 8$

h) $\sqrt{3^4} = 9$

i) $\sqrt{2^8} = 16$

j) $\sqrt{4^3} = 8$

Ex. 6 Encadrer par deux entiers consécutifs

a) $3 \leqslant \sqrt{10} < 4$

b) $3 \leqslant \sqrt{15,98} < 4$

c) $12 \leqslant \sqrt{\dfrac{721}{5}} < 13$

d) $7 \leqslant \sqrt{49} < 8$

e) $10 \leqslant \sqrt{\dfrac{819}{8}} < 11$

Ex. 7 Calculer

a) $\sqrt{8}\sqrt{2} = 4$

b) $\sqrt{8}\sqrt{18} = 12$

c) $\sqrt{28}\sqrt{63} = 42$

d) $\sqrt{0,32}\,\sqrt{0,0008} = \dfrac{2}{125} = 0{,}016$

e) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}\sqrt{48} = 4$

f) $4\sqrt{\dfrac{39}{7}}\sqrt{\dfrac{91}{75}} = \dfrac{52}{5} = 10,4$

Ex. 8 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels, et où b est le plus petit possible :

a) $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

b) $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

c) $\sqrt{245} = 7\sqrt{5}$

d) $\sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$

e) $\sqrt{3456} = 24\sqrt{6}$

Ex. 9 Calculer

a) $(3\sqrt{2}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{5}) = 13$

b) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2 = 7 + 2\sqrt{10}$

c) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})^2 = 57 - 12\sqrt{15}$

Ex. 10 Écrire sans radical au dénominateur

a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{5}{2\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

e) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

f) $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}} = -2-\sqrt{5}$

g) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{10}-\sqrt{6}}{17}$

h) $\dfrac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+\sqrt{2}} = -3-\sqrt{6}$

Ex. 11 On suppose que x et y sont deux nombres tels que $2 \leqslant x < 3$ et $-5 \leqslant y < -1$.

On en déduit que $\dfrac{9}{2} < 2x - \frac{1}{2}y < \dfrac{17}{2}$.

Ex. 12 On suppose que x et y sont deux nombres tels que $-2 \leqslant x < 1$ et $-4 \leqslant y < 0$.

On en déduit $-6 < 3x - 4y < 19$.

Ex. 13 Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes

$$A = (-4x-5)(4x-7) = -16x^2 + 8x + 35$$
$$B = (8-8x)(-2x-5) = 16x^2 + 24x - 40$$
$$C = 3(4x-7)(7x+5) = 84x^2 - 87x - 105$$
$$D = 2x(-x-7)(10x+5) = -20x^3 - 150x^2 - 70x$$

Ex. 14 Les solutions des équations sont :

a) $x = -\dfrac{5}{4} = -1,25$

b) $x = 12$

c) $x = \dfrac{1}{21}$

Ex. 15 Les solutions des inéquations sont :

a) $x > -\dfrac{1}{4}$

b) $x \leqslant 3$

c) $x \geqslant \dfrac{4}{3}$

Ex. 16 Factoriser les expressions suivantes

$$A(x) = (x+1)(2x-3)$$
$$B(x) = 3x(4x^2 - x + 5)$$
$$C(x) = (x-2)(7x-6)$$
$$D(x) = -3x(x-2)(5x^2 - 21x - 3)$$
$$E(x) = (-2x+2)(x+3)$$
$$F(x) = (x-1)(2x-3)$$
$$G(x) = (x-3)(3x+4)$$
$$H(x) = (-3x+10)(3x-1)$$
$$M(x) = (2x-1)(4x+1)$$
$$N(x) = (2x-9)(2x+9)$$
$$P(x) = (3x+3)(3x-5)$$
$$R(x) = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2$$
$$S(x) = \left(3x-\sqrt{2}\right)^2$$
$$T(x) = 3x(3x-2)^2$$
$$U(x) = x(x+1)(3x-1)$$

Ex. 17 Solution non détaillée. Si on note n l'entier positif recherché, l'équation à résoudre est

$$\frac{6+n}{13+n} = \frac{3}{4}$$

Après résolution, on obtient $n = 15$. Donc l'entier positif tel qu'en l'ajoutant aux deux termes de la fraction $\frac{6}{13}$ on obtienne une fraction égale à $\frac{3}{4}$ est 15.

Ex. 18 Solution non détaillée. Si on note n le plus petit entier positif, l'équation à résoudre est

$$n + (n+1) = 37$$

Après réolution, on obtient $n = 18$. Donc les deux entiers positifs consécutifs dont la somme est 37 sont 18 et 19.

Ex. 19 Solution non détaillée. Soit n le plus petit des trois entiers pairs recherchés. L'équation à résoudre est

$$n + (n + 2) + (n + 4) = 66$$

Après résolution on trouve $n = 20$, qui est bien pair. Donc les trois entiers pairs consécutifs dont la somme est 66 sont 20, 22 et 24.

Ex. 20 Solution non détaillée. Première méthode : si on note n le nombre d'années devant s'écouler pour que le rapport de l'âge du père sur l'âge du fils devienne égal à $\frac{16}{7}$, alors

$$\frac{36 + n}{9 + n} = \frac{16}{7}$$

Après résolution, on trouve $n = 12$. Donc le fils aura $9 + 12 = 21$ ans lorsque le rapport de l'âge du père sur celui du fils sera égal à $\frac{16}{7}$.

Deuxième méthode : si on note f l'âge qu'aura le fils lorsque le rapport de l'âge du père sur celui du fils sera de $\frac{16}{7}$, alors

$$\frac{f + (36 - 9)}{f} = \frac{16}{7}$$

Après résolution, on trouve $f = 21$. Donc le fils aura 21 ans lorsque le rapport de l'âge du père sur celui du fils sera égal à $\frac{16}{7}$.

Ex. 21 Tout d'abord, puisqu'il y a 7 femmes ayant une femme à leur droite et 12 femmes ayant un homme à leur droite, il y a au total $7 + 12 = 19$ femmes. En effet : une femme a soit une femme à sa droite, soit un homme à sa droite (sans autre possibilité) ; et toute femme a soit une femme à sa droite soit un homme à sa droite.

Notons x le nombre d'hommes.Puisque $\frac{3}{4}$ des hommes ont une femme à leur droite, $\frac{1}{4}$ des hommes ont un homme à leur droite.

Intéressons-nous à la personne située à gauche de chaque homme. Le nombre d'hommes ayant une femme à leur gauche est égal au nombre de femmes ayant un homme à leur droite, donc 12. Et le nombre d'hommes ayant un homme à leur gauche est égal au nombre d'hommes ayant un homme à leur droite, donc $\frac{1}{4}x$. Donc, en faisant le bilan des hommes :

$$12 + \frac{1}{4}x = x$$

Après résolution, on trouve $x = 16$. Finalement, il y a au total $16 + 19 = 35$ convives à cette table.

Ex. 22 Notons k le nombre de pièces de 20 centimes, l celui de 50 centimes et m celui de un euro. Alors, puisque la somme totale est de 30 euros :

$$k \times \frac{1}{5} + l \times \frac{1}{2} + m = 30$$

Par ailleurs, puisqu'il y a au total 52 pièces :

$$k + l + m = 52$$

Enfin, puisque le nombre des pièces de 20 centimes correspond aux $\frac{3}{4}$ de celui des pièces de 50 centimes :

$$k = \frac{3}{4}l$$

On a donc un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} \frac{1}{5}k + \frac{1}{2}l + m = 30 \\ k + l + m = 52 \\ k = \frac{3}{4}l \end{cases}$$

Après résolution, on trouve $k = 15$, $l = 20$ et $m = 17$. Donc il y a 17 pièces de un euro, 20 pièces de 50 centimes et 15 pièces de 20 centimes.