Chpt.8 – Équations de droites et systèmes
Exercices corrigés

Les corrigés qui suivent donnent, pour certains, les réponses mais sans détailler tous les calculs. On rappelle que ces calculs doivent toujours être explicitement donnés lors d'une évaluation.

Ex. 1 Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dirige (AB). Or $\overrightarrow{AB}\,(7;\,-1)$. On en déduit qu'une équation cartésienne de (AB) est $-x-7y+c=0$, où $c\in\mathbb{R}$.

De plus $\mathrm{A}\,(-5;\,4)\in(\mathrm{AB})$ donc (en remplaçant) : $5-28+c=0$ d'où $c=23$ et une équation cartésienne de (AB) est $-x-7y+23=0$.

Pour (AC), on remarque que $x_{\mathrm{A}}=x_{\mathrm{C}}=-5$ donc une équation cartésienne de (AC) est $x+5=0$.

Pour (BC), on remarque que $y_{\mathrm{B}}=y_{\mathrm{C}}=3$ donc une équation cartésienne de (AC) est $y-3=0$.

Ex. 2

1. Puisque la droite recherchée est dirigée par $\vec{u}\,(5;\,-1)$, une de ses équations cartésiennes est $-x-5y+c=0$, où $c\in\mathbb{R}$.

   Or $\mathrm{T}\,(-10;\,5)$ est sur cette droite, donc (en remplaçant), il vient (après calculs) $c=15$.

   Donc une équation cartésienne de la droite passant par $\mathrm{T}\,(-10;\,5)$ et dirigée par $\vec{u}\,(5;\,-1)$ est $-x-5y+15=0$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{FG}$ dirige la droite (FG). Or $\overrightarrow{FG}\,(20;\,-4)$. Donc une équation cartésienne de (FG) est $-4x-20y+c=0$ où $c\in\mathbb{R}$.

   Or $\mathrm{F}\,(5;\,2)\in(\mathrm{FG})$ donc (après calculs) $c=60$.

   Donc une équation cartésienne de (FG) est $-4x-20y+60=0$ ou encore $-x-5y+15=0$.
3. On constate que les droites des deux questions précédentes sont confondues, donc F, G et T sont alignés.

Ex. 3

1. La droite d est dirigée par $\overrightarrow{MN}\,(10;\,-5)$ et passe par $\mathrm{P}\,(-3;\,3)$ On trouve (après calculs) : $d: x+2y-3=0$.
2. Le point $\mathrm{R}\,(15;\,-6)$ est sur la droite d si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation cartésienne de d. Or $15-12-3=0$ donc $R\in d$.

Ex. 4 La droite d_1 passe par $(3;\,0)$ et est dirigée par $\vec{u}\,(-4;\,-3)$.

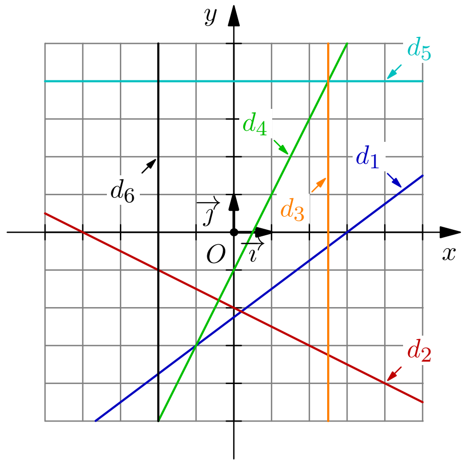
La droite d_2 passe par $(0;\,-2)$ et $(-4;\,0)$.

La droite d_3 est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par $(2,5;\,0)$.

La droite d_4 passe par le point $(0;\,-1)$ et a comme coefficient directeur $a=2$.

La droite d_5 est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point $(0;\,4)$.

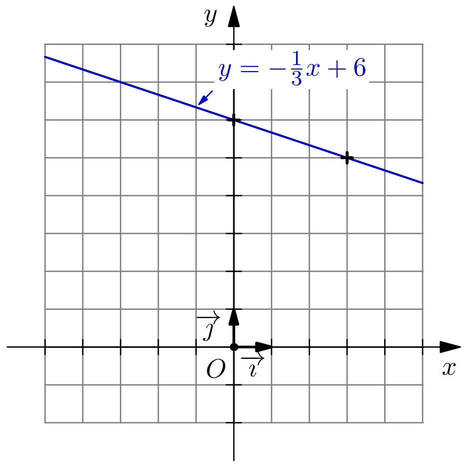
La droite d_6 est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par $(-2;\,0)$.



Ex. 5

1. Soit $y=ax+b$ l'équation réduite de (AB). On trouve (après calculs) $a=-\frac{1}{3}$, donc (AB) : $y=-\frac{1}{3}x+b$ où $b\in\mathbb{R}$.

   Or $\mathrm{B}\,(30;\,-4)$ est sur (AB) donc (après calculs) $b=6$. Donc l'équation réduite de (AB) est $y=-\frac{1}{3}x+6$.
2.



Ex. 6

1. La droite d_1 est dirigée par $\vec{u}_1\,(-1;\,2)$ et d_2 est dirigée par $\vec{u}_2\,(-3;\,4)$.

   Or $\det(\vec{u}_1,\vec{u}_2)=-4+6=2\neq0$ donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires, donc d_1 et d_2 sont sécantes.

2. On résout le système suivant par substitution

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ 4x + 3(-2x - 1) = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ -2x = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7 \\ y = 13 \end{cases}$$

Donc le point d'intersection de d_1 et d_2 est le point de coordonnées $(-7; 13)$.

Ex. 7

1. La droite d_1 est dirigée par $\vec{u}_1$ $(4; -3)$ et d_2 est dirigée par $\vec{u}_2$ $(2; 5)$.

   Or $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 20 + 6 = 26 \neq 0$ donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires, donc d_1 et d_2 sont sécantes.
2. On résout le système suivant par combinaison

$$\begin{cases} 3x + 4y = 19 \\ 5x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 19 \\ 10x - 4y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x = 13 \\ 3x + 4y = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ 4y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Donc le point d'intersection de d_1 et d_2 est le point de coordonnées $(1; 4)$.

Ex. 8

1. *b)*
2. On trouve (après calculs) $m = -3$.
3. On trouve (après calculs) $m' = -3$.
4. Le coefficient directeur m de (MN) est égal au coefficient directeur m' de (MP), donc (MN) et (MP) sont parallèles, donc M, N et P sont alignés.

Ex. 9 Recherchons un vecteur pour chacune des droites. On notera $\vec{u}_i$ un vecteur directeur de la droite d_i (pour i entier allant de 1 à 6). On trouve :

$\vec{u}_1$ $(-2; 1)$
$\vec{u}_2$ $(-5; 3)$
$\vec{u}_3$ $(-4; 2)$
$\vec{u}_4$ $(10; 6)$
$\vec{u}_5$ $(-2; -6)$
$\vec{u}_6$ $(3; 9)$

$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = -6 + 5 = -1 \neq 0$: d_1 et d_2 sont sécantes ;
$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_3) = -4 + 4 = 0$: d_1 et d_3 sont parallèles ;
$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_4) = -12 - 10 = -22 \neq 0$: d_1 et d_4 sont sécantes ;
$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_5) = 12 + 2 = 14 \neq 0$: d_1 et d_5 sont sécantes ;
$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_6) = -18 - 3 = -21 \neq 0$: d_1 et d_6 sont sécantes.

$\det(\vec{u}_2, \vec{u}_3) = -10 + 12 = 2 \neq 0$: d_2 et d_3 sont sécantes ;
$\det(\vec{u}_2, \vec{u}_4) = -30 - 30 = -60 \neq 0$: d_2 et d_4 sont sécantes ;
$\det(\vec{u}_2, \vec{u}_5) = 30 + 6 = 36 \neq 0$: d_2 et d_5 sont sécantes ;
$\det(\vec{u}_2, \vec{u}_6) = -45 - 9 = -54 \neq 0$: d_2 et d_6 sont sécantes.

$\det(\vec{u}_3, \vec{u}_4) = -24 - 20 = -44 \neq 0$: d_3 et d_4 sont sécantes ;
$\det(\vec{u}_3, \vec{u}_5) = 24 + 4 = 28 \neq 0$: d_3 et d_5 sont sécantes ;
$\det(\vec{u}_3, \vec{u}_6) = -36 - 6 = -42 \neq 0$: d_3 et d_6 sont sécantes.

$\det(\vec{u}_4, \vec{u}_5) = -60 + 12 = -48 \neq 0$: d_4 et d_5 sont sécantes ;
$\det(\vec{u}_4, \vec{u}_6) = 90 - 18 = 72 \neq 0$: d_4 et d_6 sont sécantes.

$\det(\vec{u}_5, \vec{u}_6) = -18 + 18 = 0$: d_5 et d_6 sont parallèles.

En conclusion, les familles de droites deux à deux parallèles forment la partition[1] suivante de l'ensemble $\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\}$:

$\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\} = \{d_1, d_3\} \cup \{d_5, d_6\} \cup \{d_2\} \cup \{d_4\}$

Ex. 10

1. *a)*
2. *a)*
3. *b)*

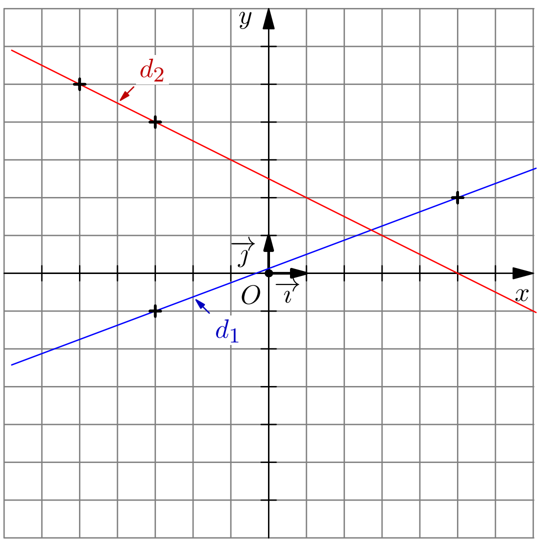
Ex. 11 (Calculs non détaillés)
1. $2x + y - 10 = 0$ 2. $x + 2 = 0$

Ex. 12 (Calculs non détaillés)
1. $x - 3y - 35 = 0$ 2. $-x - 5y + 20 = 0$

Ex. 13 (calculs non détaillés)
1. $7x + 3y - 17 = 0$ 2. $-x + 4y - 3 = 0$

Ex. 14 (Calculs non détaillés)
1. (AB) : $4x + y - 3 = 0$ 2. (AB) : $-2x + y + 4 = 0$

Ex. 15 (Calculs non détaillés)
1. (AB) : $-3x + 8y - 1 = 0$ Pour tracer la droite : on sait que le point A $(-3; -1)$ est sur cette droite. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ $(40; 15)$ dirige (AB). Donc $\vec{u}$ $(8; 3)$ dirige aussi (AB). On en déduit que le point de coordonnées $(5; 2)$ est sur (AB). 2. $x + 2y - 5 = 0$ Pour tracer la droite : on sait que le point A $(-3; -1)$ est sur cette droite. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ $(58; -29)$ dirige (AB). Donc $\vec{u}$ $(2; -1)$ dirige aussi (AB). On en déduit que le point de coordonnées $(-3; 4)$ est sur (AB).



1. Une *partition* d'un ensemble E est une famille de parties de cet ensemble dont la réunion est égale à l'ensemble E et qui sont deux à deux disjointes (d'intersection vide).